平成10年度

修士論文題目

射影的アノソフ流の高次元および複素多様体への一般化

学籍番号 76013
フリガナ コダマヒロキ
氏名 児玉 大樹

論文内容の要旨

実 3 次元閉多様体上のアノソフ流は双接触構造を導くことが指摘されていた。しかし，双接触構造は必ずしもアノソフ流を導かない。

三松氏はアノソフ流の拡張として射影的アノソフ流を定義した。また，Eliashberg-Thurston は等角的アノソフ流 (conformally-Anosov flow) を定義した。これらは同値な概念である。また，射影的アノソフ流は双接触構造を，双接触構造は射影的アノソフ流をそれぞれ導く。

この論文では射影的アノソフ流の定義を実 2n+1 次元閉多様体及び複素 3 次元閉多様体に拡張し，それらと接触構造との関連を考察した。

実 2n+1 次元閉多様体においては，射影的アノソフ流の拡張として射影的アノソフシステムを定義した。射影的アノソフシステムの定める hyperplane field，及び射影的アノソフシステムを定義するリーマン計量がともに 1 階連続的微分可能のとき，接触構造が定まるという結果を得た。

複素 3 次元閉多様体においては，Ghys によって定義された正則アノソフ流の定義を拡張して正則射影的アノソフ流を定義し，自明でない例を得た。しかし，正則アノソフ流及び正則射影的アノソフ流の上には，必ずしも正則接触構造は定義されないことがわかった。

一方，実 3 次元上の射影的アノソフ流の性質を複素 3 次元に拡張した強 L 流を定義した。強 L 流は正則射影的アノソフ流である。また，次のような性質をみたす: 強 L 流の orbit を含む正則な plane field で，不安定葉層，安定葉層と横断的に交わるもの全体の集合は，球面から 2 点を除いた空間と同相であり，それらは全て正則接触構造である。この正則接触構造どうしは互いに横断的であり，強 L 流の作用により推移的に移り合う。

1 序

M を向きづけられた実 3 次元閉多様体，ϕ^t を M 上の C^∞ 級 flow とする。ϕ^t がアノソフ流であるとは，ϕ^t で不変な直和分解 $TM = E^{uu} \oplus E^{ss} \oplus T\phi$ が存在し，適当なリーマン計量に対して E^{uu}，E^{ss} のベクトルのノルムが $d\phi^t$ によって指数関数的に増大・減少することである。アノソフ流に対して $E^u = E^{uu} \oplus T\phi$ と $E^s = E^{ss} \oplus T\phi$ とが互いに直交するようなリーマン計量を入れ，$T\phi$ を含み E^u と $\pm 45^\circ$ をなすような plane field の組 (ξ_+, ξ_-) を考える。それぞれに $d\phi^t$ を作用させると，$t \to \infty$ で E^u に，$t \to -\infty$ で E^s にそれぞれ単調に漸近する。よって，ξ_+，ξ_- は向きの異なる接触構造である。このような向きの異なる互いに横断的な接触構造の組 (ξ_+, ξ_-) を双接触構造という。

しかし，実 3 次元閉多様体に双接触構造 (ξ_+, ξ_-) が与えられたとき，$T\phi = \xi_+ \cap \xi_-$ をみたす flow ϕ^t は必ずしもアノソフ流ではない。

この問題に対して，三松氏はアノソフ流概念の一般化である射影的アノソフ流を定義した。

定義 ([M1]) ϕ^t が射影的アノソフ流であるとは，ϕ^t によって不変な plane field E^u，E^s が存在し，$T\phi$ を含み E^u，E^s と異なる plane field はそれぞれ $d\phi$ により $t \to \infty$ で E^u に，$t \to -\infty$ で E^s に漸近することをいう。

また，Eliashberg-Thurston は等角的アノソフ流 (conformally-Anosov flow) を定義した。

定義 ([ET]) ϕ^t が等角的アノソフ流であるとは，ϕ^t によって不変な plane field E^u，E^s が存在し，適当なリーマン計量に対して $E^u/T\phi$，$E^s/T\phi$ のベクトルのノルムの比が $d\phi^t$ によって指数関数的に増大することである。

これらは同値な概念であるので，以下では両方とも射影的アノソフ流と呼ぶことにする。射影的アノソフ流にはアノソフ流のときと同様の構成で双接触構造が定まり，逆に双接触構造 (ξ_+, ξ_-) に対して，$T\phi = \xi_+ \cap \xi_-$ をみたす flow ϕ^t は射影的アノソフ流となる [M1][ET]。

この論文では射影的アノソフ流の定義を実 $2n+1$ 次元閉多様体及び複素 3 次元閉多様体に拡張し，それらと接触構造との関連を考察した。

以下にこの論文の結果を記す。

第 4 章の内容は指導教官である坪井教授との共同研究によるものである。まず，実 2n+1 次元閉多様体における射影的アノソフ流の拡張として射影的アノソフシステムを定義した。

定義 (射影的アノソフシステム) 実 $2n+1$ 次元閉多様体 M 上の非特異な $\mathbb{R}^n$-作用 $\phi^{\boldsymbol{t}}$ が射影的アノソフシステムであるとは，連続な invariant splitting

$TM/T\phi = E^1 \oplus \cdots \oplus E^{n+1}$ が存在し，適当なリーマン計量に対して次をみたすことである。

任意の $1 \leq k \leq n$，$p \in M$，$v^\sigma \in E^\sigma_p$ に対して，関数 P, U, $S : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在して，

$$\begin{pmatrix} \|d\phi^{te_k}(v^1)\| \\ \|d\phi^{te_k}(v^2)\| \\ \vdots \\ \|d\phi^{te_k}(v^k)\| \\ \|d\phi^{te_k}(v^{k+1})\| \\ \vdots \\ \|d\phi^{te_k}(v^{n+1})\| \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} \|v^1\| \\ \|v^2\| \\ \vdots \\ U(t)\|v^k\| \\ S(t)\|v^{k+1}\| \\ \vdots \\ \|v^{n+1}\| \end{pmatrix}$$

をみたし，$U(t) \geq \exp(Ct)$，$S(t) \leq \exp(-Ct)$ が $t > 0$ で成立。ここで，e_1，$\ldots$，e_n は $\mathbb{R}^n$ の基底である。

射影的アノソフシステムの例を二つ構成した。そのうちの一つは Geiges によって構成された例 [Ge] の一般化に相当する。

射影的アノソフシステムに対して，次の結果を得た。

定理　射影的アノソフシステムを定義するリーマン計量が C^1 級で，

$$\mathcal{E}^i = E^1 \oplus \cdots \oplus \widehat{E^i} \oplus \cdots \oplus E^{n+1} \oplus T\phi$$

がそれぞれ C^1 級の 1 形式で表される hyperplane field ならば，おのおのが $\mathcal{E}^1$，$\ldots$，$\mathcal{E}^{n+1}$ を定める 1 形式 α_1，$\ldots$，α_{n+1} で，$\omega = q_1\alpha_1 + \cdots + q_{n+1}\alpha_{n+1}$，$q_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が接触構造を定める 1 形式となるようなものがとれる。

第 5 章では複素 3 次元閉多様体への射影的アノソフ流の拡張を考察した。Ghys[Gh] は複素 3 次元閉多様体上の正則アノソフ流を定義し，分類した。この論文では実 3 次元での場合と同様の拡張により正則射影的アノソフ流を定義し，正則アノソフ流ではないが正則射影的アノソフ流であるような例を得た。

しかし，正則アノソフ流については実多様体のアノソフ流の場合と異なり，必ずしもその上に正則接触構造を導かない。正則射影的アノソフ流についても同様である。

そこで実射影的アノソフ流の性質を複素 3 次元に拡張した強 L 流を定義した。強 L 流について，次の結果を得た。

定理　(ϕ^τ, ξ) が M 上の強 L 流とする。M 上の $T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則 plane field 全体を Ξ とすると，$\Xi = \{d\phi^{-\tau}(\xi) | \tau \in \mathbb{C}\}$ である。特に，Ξ の元は全て正則接触構造であり，任意の $\xi_0 \in \Xi$ に対して，(ϕ^τ, ξ_0) は再び M 上の強 L 流である。また，Ξ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{$ 2 points $\}$ と同相である。

また，強 L 流は正則射影的アノソフ流であることがわかった。

最後に，この論文作成にあたって熱心なご指導をいただいた坪井俊先生，数多くの貴重な助言を下さった三松佳彦先生，さまざまな議論につきあっていただいた野田健夫氏，及びお世話になった多くの方々に感謝の意をささげたいと思います。

2 準備

2.1 実多様体

M を実 $2n+1$ 次元閉多様体とする。

定義 2.1 (接触構造) M の開集合 U 上の C^1 級の 1 形式 α は $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ をみたすとき接触形式と呼ばれる。

M の hyperplane field (TM の余次元 1 の部分ベクトル束) ξ が接触構造であるとは，ξ を局所的に $\xi = \ker \alpha$ と表したとき α が接触形式となることである。この条件は $d\alpha$ が ξ 上非退化，つまり，各点 $p \in M$ について，交代双線形形式 $d\alpha_p : \xi_p \times \xi_p \to \mathbb{R}$ が非退化であることと同値である。

n が奇数のとき，$\alpha \wedge (d\alpha)^n$ の正負は α のとり方によらないので多様体の向きを $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ によって定めることができる。また，M にあらかじめ向きが入っているとき，その向きと $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ の定める向きとが一致するときに正の接触構造 (形式)，逆の向きを定めるときに負の接触構造 (形式) と呼ばれる。

n が偶数のときには $(d\alpha)^n$ が ξ に向きを定める。

また，$n = 1$ のとき，接触構造の組 (ξ_+, ξ_-) は ξ_+ が正，ξ_- が負の接触構造であり，互いに横断的なときに双接触構造と呼ばれる。

定義 2.2 ($\langle , \rangle$ 積[ET]) M の開集合 U 上の $n+1$ 個の C^1 級の 1 形式 α_1，$\dots$，α_{n+1} に対して，その $\langle , \rangle$ 積を

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \rangle = \ & \alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d\alpha_3 \wedge \cdots \wedge d\alpha_{n+1} \\ & + d\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge d\alpha_3 \wedge \cdots \wedge d\alpha_{n+1} \\ & + d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge d\alpha_{n+1} \\ & + \cdots \\ & + d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d\alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n+1}\end{aligned}$$

で定める。

補題 2.3 ([ET]) α_1，$\dots$，α_{n+1} を，葉層構造を定める C^1 級の 1 形式とする。つまり，$\alpha_i \wedge d\alpha_i = 0$ である。このとき，$\omega = q_1\alpha_1 + \cdots + q_{n+1}\alpha_{n+1}$，$q_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が接触形式になる必要十分条件は $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \rangle \neq 0$ である。

証明 $\omega \wedge (d\omega)^n = n!\, q_1 \dots q_{n+1} \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1} \rangle$. ■

定義 2.4 (orbit による商束) ここでは，M を m 次元多様体とする。$1 \leq n < m$ とし，ϕ を M 上の非特異な $\mathbb{R}^m$-作用とする。$T\phi$ で ϕ の orbit の接ベクトル全体からなる TM の部分束をあらわす。すると，商束 $TM/T\phi$ が定まる。

$v_p = [\widetilde{v_p}] \in TM_p/T\phi_p$ を一つとる。M にリーマン計量 $\|\cdot\|$ が与えられているとき，$\|v_p\|$ を

$$\|v_p\| = \inf_{u \in T\phi} \|\widetilde{v_p} + u\|$$

で定める。また，$T\phi \subset \ker \alpha$ をみたす M 上の 1 形式 α に対して

$$\alpha(v_p) = \alpha(\widetilde{v_p})$$

と定める。この値は $\widetilde{v_p}$ のとり方によらない。

2.2 複素多様体

複素多様体に対しても同様の定義をする。M を複素 3 次元閉多様体とする。

定義 2.5 (正則接触構造[Y]) M の開集合 U 上の正則 1 形式 α は $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ をみたすとき正則接触形式と呼ばれる。正則接触構造 ξ とは各点の近傍で局所的に正則接触形式の kernel として定義される正則な plane field である。

定義 2.6 ($\langle , \rangle$ 積) M の開集合 U 上の 2 個の正則 1 形式 α，β に対して，その $\langle , \rangle$ 積を

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \wedge d\beta + d\alpha \wedge \beta$$

で定める。

補題 2.7 α，β を，正則葉層構造を定める正則 1 形式とする。つまり，$\alpha \wedge d\alpha = \beta \wedge d\beta = 0$ である。このとき，$\omega = q_1\alpha + q_2\beta$，$q_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が正則接触形式になる必要十分条件は $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ である。

証明 $\omega \wedge d\omega = q_1 q_2 \langle \alpha, \beta \rangle$. ■

定義 2.8 (orbit による商束) ϕ^τ を M 上の非特異な正則 flow とする。$T\phi$ で ϕ の orbit の接ベクトル全体からなる $T_{\mathbb{C}}M$ の部分束をあらわす。すると，商束 $T_{\mathbb{C}}M/T_{\mathbb{C}}\phi$ が定まる。以下，$T_{\mathbb{C}}$ を T と省略する。

$v_p = [\widetilde{v_p}] \in TM_p/T\phi_p$ を一つとる。M にエルミート計量 $\|\cdot\|$ が与えられているとき，$\|v_p\|$ を

$$\|v_p\| = \inf_{u \in T\phi} \|\widetilde{v_p} + u\|$$

で定める。また，$T\phi \subset \ker \alpha$ をみたす M 上の 1 形式 α に対して

$$\alpha(v_p) = \alpha(\widetilde{v_p})$$

とする。

3 射影的アノソフ流

M を向きづけられた 3 次元閉多様体，$\phi^t : M \to M$ を M 上の非特異な C^∞ 級の flow，X を ϕ^t を生成するベクトル場とする。

定義 3.1 (pA flows [ET]) ϕ^t は以下の条件をみたすとき射影的アノソフ流 (pA flow) と呼ばれる。M 上の連続なリーマン計量 $\|\cdot\|$，連続な invariant splitting $TM/T\phi = E^{uu} \oplus E^{ss}$ 及び定数 $C > 0$ が存在して，

$$\frac{\|d\phi^t(v_p^u)\|}{\|d\phi^t(v_p^s)\|} \geq \exp(Ct)\frac{\|v_p^u\|}{\|v_p^s\|} \tag{1}$$

が任意の $t > 0$，$p \in M$，$v_p^u \in E_p^{uu}$ 及び $v_p^s \in E_p^{ss}$ に対して成立する。

Tangent plane fields E^u 及び E^s をそれぞれ $E^{uu} \oplus T\phi$ 及び $E^{ss} \oplus T\phi$ によって定義する。E^u 及び E^s は C^1 級のとき一意積分可能であり，余次元 1 の葉層構造 $\mathcal{F}^u$，$\mathcal{F}^s$ ができる。これを，それぞれ不安定葉層，安定葉層と呼ぶ。

注 3.2 ([N3]) コンパクト多様体 M 上の連続なリーマン計量は互いに同値なので，射影的アノソフ流 ϕ^t が与えられたとき，任意の連続なリーマン計量 $\|\cdot\|'$ に対して $C' > 0$，$0 < D \leq 1$ が存在して

$$\frac{\|d\phi^t(v_p^u)\|'}{\|d\phi^t(v_p^s)\|'} \geq D\exp(C't)\frac{\|v_p^u\|'}{\|v_p^s\|'} \tag{2}$$

が任意の $t > 0$，$p \in M$，$v_p^u \in E_p^{uu}$ 及び $v_p^s \in E_p^{ss}$ に対して成立する。

逆に，(2) をみたす連続なリーマン計量 $\|\cdot\|'$ が与えられたとき，リーマン計量をとりなおして，(1) をみたすようにできる。

証明　まず，

$$\frac{\|d\phi^t(v_p^u)\|'}{\|d\phi^t(v_p^s)\|'} = U_p(t)\frac{\|v_p^u\|'}{\|v_p^s\|'}$$

とおく。$U_p(t)$ は v_p^u，v_p^s のとりかたにはよらず，$p \in M$ 及び $t \in \mathbb{R}$ の連続関数である。また，

$$U_p(0) = 1$$
$$U_p(t_1 + t_2) = U_{\phi^{t_1}(p)}(t_2)\, U_p(t_1)$$

をみたし，$t > 0$ に対して $U_p(t) \geq D\exp(C't)$ である。

さて，$T > 0$ を $D\exp(C'T) > 2$ をみたすようにとる。新しいリーマン計量 $\|\cdot\|$ を

$$\|v_p^u\| = \int_0^T U_p(t)dt\ \|v_p^u\|'$$
$$\|v_p^s\| = \|v_p^s\|'$$

をみたすように定める。

$\widetilde{U}_p(t)$ を

$$\frac{\|d\phi^t(v_p^u)\|}{\|d\phi^t(v_p^s)\|} = \widetilde{U}_p(t)\frac{\|v_p^u\|}{\|v_p^s\|}$$

で定めると，

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_p(t_0) &= \frac{\int_0^T U_{\phi^{t_0}(p)}(t)dt\ \|d\phi^{t_0}(v_p^u)\|'}{\|d\phi^{t_0}(v_p^s)\|'} \Big/ \frac{\int_0^T U_p(t)dt\ \|v_p^u\|'}{\|v_p^s\|'} \\ &= \frac{\int_0^T U_{\phi^{t_0}(p)}(t)dt}{\int_0^T U_p(t)dt}\ U_p(t_0) \\ &= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} U_p(t)dt}{\int_0^T U_p(t)dt}.\end{aligned}$$

よって，

$$\widetilde{U}_p'(0) = \frac{U_p(T) - U_p(0)}{\int_0^T U_p(t)dt}$$

である。T のとりかたより，右辺は正である。また，$U_p(t)$ は連続で集合 $M \times [0,T]$ はコンパクトなので，$C > 0$ が存在して，任意の点 p に対して

$$\widetilde{U}_p'(0) \geq C$$

と書ける。

一方，$\widetilde{U}_p$ も

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_p(t_1+t_2) &= \widetilde{U}_{\phi^{t_1}(p)}(t_2)\ \widetilde{U}_p(t_1) \\ \widetilde{U}_p(0) &= 1\end{aligned}$$

をみたすので，

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{U}_p'(t)}{\widetilde{U}_p(t)} &= \widetilde{U}_{\phi^t(p)}'(0) \\ &\geq C\end{aligned}$$

となる。よって $t > 0$ で

$$\widetilde{U}_p(t) \geq \exp(Ct)$$

である。この条件は(1) と同値である。 ■

注 **3.3** 任意の射影的アノソフ流 ϕ^t に対して，C^∞ 級のリーマン計量 $\|\cdot\|'$ は条件(2) をみたすので，このリーマン計量から上記の構成法でリーマン計量

を作ると，新しいリーマン計量 $\|\cdot\|$ は条件(1) をみたし，E^u，E^s の中では C^∞ 級になっている。一般には E^s，E^u は C^∞ にはならないが，E^s，E^u が plane field として C^r 級ならばリーマン計量を M 全体で C^r 級にとることができる。

命題 3.4 ([M1][N3]) ϕ^t が射影的アノソフ流であることは，次の条件と同値である。

ϕ^t によって不変な，互いに横断的な plane field E^u，E^s が存在し，$T\phi$ を含み E^u，E^s と異なる plane field はそれぞれ $d\phi$ により $t \to \infty$ で E^u に，$t \to -\infty$ で E^s に漸近する。

証明　射影的アノソフ流が条件をみたすことは明らかである。

逆に，ϕ^t が条件をみたすとする。M 上に E^u，E^s が垂直となるようなリーマン計量を定める。各点 $p \in M$ 上の $T\phi_p$ を含む接平面全体 $P(TM_p/T\phi_p)$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ と同相である。$E^u/T\phi$，$E^s/T\phi$ 方向を軸に，リーマン計量によるノルムにより座標を入れる。すると，$d_p\phi^t{}_* : P(TM_p/T\phi_p) \to P(TM_{\phi^t(p)}/T\phi_{\phi^t(p)})$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ から $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ への向きを保つ線形写像で，軸を保つので，$\begin{pmatrix} a_p(t) & 0 \\ 0 & a_p(t)^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ だと思える。M のコンパクト性から十分大きな T をとると，任意の点 $p \in M$ に対して $a_p(T) \geq e$ が成立する。また，$a_p(t)$，$(t,p) \in [0,T] \times M$ はコンパクト性より有界である。よって，$a_p(t) \geq D\exp(t/T)$ が成立。以上より ϕ^t は射影的アノソフ流である。 ■

定義 3.5 (Anosov flows[M1]) ϕ^t は以下の条件をみたすときアノソフ流 (Anosov flow) と呼ばれる。M 上の連続なリーマン計量 $\|\cdot\|$，連続な invariant splitting $TM = E^{uu} \oplus E^{ss} \oplus T\phi$ 及び定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|d\phi^t(v_p^u)\| \geq \exp(Ct)\|v_p^u\|$$
$$\|d\phi^t(v_p^s)\| \leq \exp(-Ct)\|v_p^s\|$$

が任意の $t > 0$，$p \in M$，$v_p^u \in E_p^{uu}$ 及び $v_p^s \in E_p^{ss}$ に対して成立する。

例 3.6 ($SL(2,\mathbb{R})$ の例) Γ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の torsion-free なココンパクトな離散部分群とする。$M = SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ は 3 次元多様体である。$SL(2,\mathbb{R})$ への左移動 $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ による $\mathbb{R}$-作用を考えると，この作用は右移動と可換なので M 上の $\mathbb{R}$-作用を定める。この作用はアノソフ流である。

例 3.7 (トーラスの懸垂) $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ とし，$\bar{A}$ を $N = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の対応する微分同相とする。多様体 M を $M = N \times \mathbb{R}/\sim$，$(x,y) \sim (\bar{A}(x), y+1)$ で定め，M 上の flow を $\phi^t : [(x,y)] \mapsto [(x,y+t)]$ によって定める。このような M を $\bar{A}$ の mapping torus，ϕ^t を $\bar{A}$ の懸垂と呼ぶ。A が異なる二つの実固有値を持つとき，ϕ^t はアノソフ流である。

次の例は，射影的アノソフ流であるが，アノソフ流ではないものである。

例 **3.8** ([ET]) 定数 $a^+ > a^- > 0$ 及び b_1，$b_2 > 1$ を固定する。$N = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\sim$，$(x,y) \sim (b_1 x, b_2 y)$ とし，$f : (x,y) \mapsto (a^+x, a^-y)$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の微分同相とする。f により，N 上の微分同相 $\bar{f}$ が定まる。$\bar{f}$ の mapping torus M 及び懸垂 ϕ^t をとれば，ϕ^t は M 上の射影的アノソフ流である。

この flow の (不) 安定葉層には flow で不変であるコンパクトな leaf があるので，アノソフ流ではない。

次に，接触構造について考える。接触構造に関して，次の基本的な性質がある。

補題 **3.9** (接触構造の性質[ET]) ξ を M 上の plane field，ϕ^t を M 上の非特異な flow とし，$T\phi \subset \xi$ とする。X に横断的な plane field ν をとり，(ν, X) が多様体 M の向きを定めるように ν に向きを入れる。$\lambda = \xi \cap \nu$ とおく。また，$\lambda^t(p)$ を $(d\phi^{-t}\xi)_p \cap \nu_p$ で定める。$\lambda^0(p)$ と $\lambda^t(p)$ のなす角を $\theta^t(p)$ と書く。このとき，ξ が正の (あるいは負の) 接触構造である必要十分条件は $\frac{d}{dt}\theta^t(p) < 0$ (あるいは > 0) が任意の $p \in M$，$t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことである。

証明　点 $p \in M$ を固定して，p を原点とする座標近傍 $U = \{(x,y,z)\}$ を次の条件をみたすようにとる。

$$\phi^t((x,y,z)) = (x,y,z+t)$$
$$\nu = \ker dz.$$

さらに $\lambda^0(p)$ が x 軸に一致するようにとれば，

$$\lambda^t(p) = \ker(-\sin\theta^t(p)dx + \cos\theta^t(p)dy)$$

と書ける。すると点 p の orbit にそって

$$\xi = \ker\alpha, \quad \alpha = -\sin\theta^z(p)dx + \cos\theta^z(p)dy$$

とあらわされる。orbit 上の各点において

$$\begin{aligned}\alpha \wedge d\alpha &= -dx \wedge dy \wedge d\theta \\ &= -\frac{d\theta}{dz} dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

なので，ξ が正の接触構造 $\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\theta^t(p) < 0$ である。 ■

以下，E^u，E^s が transversely orientable のときを考える。transversely non-orientable のときは，二重被覆をとって transversely orientable にしたあと，同様の議論が成立する。

定理 3.10 ([M1][ET][N3]) M 上の任意の射影的アノソフ流 ϕ^t に対して，双接触構造 (ξ_+, ξ_-) で $\xi_+ \cap \xi_- = T\phi$ をみたすものが存在する。

特に E^u 及び E^s がそれぞれ C^1 級の 1 形式で定まるとき，それらを定める 1 形式 α 及び β で，

$$\langle \alpha, \beta \rangle > 0$$

をみたすものがとれる。このとき，たとえば $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ が M 上の双接触形式となる。

証明　まず，E^u 及び E^s が C^1 級の 1 形式で定まるときを考える。リーマン計量を C^1 級にとり直す。1 形式 α 及び β を $\|\alpha\| = 1$，$\|\beta\| = 1$ と正規化し，$L_X\alpha = f\alpha$，$L_X\beta = g\beta$ とする。つまり，

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\phi^t)^*\alpha - \alpha}{t} = f\alpha$$

である。

ここで，v^u，v^s を E^{uu}，E^{ss} の section で $\beta_p(v^u_p) = 1$，$\alpha_p(v^s_p) = 1$ となるようにとる。また，$\{v^u_p, v^s_p, X_p\}$ がこの順に M の向きを定めるとする。すると，

$$(\phi^{-t})^*\alpha(d\phi^t(v^s)) = 1.$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\|d\phi^t(v^s)\| - 1}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(d\phi^t(v^s)) - (\phi^{-t})^*\alpha(d\phi^t(v^s))}{t} \\ &= L_X\alpha(v^s) \\ &= f\alpha(v^s) \\ &= f.\end{aligned}$$

同様にして，

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|d\phi^t(v^u)\| - 1}{t} = g.$$

よって，ϕ^t が射影的アノソフ流 $\Longleftrightarrow g - f > 0$.

一方，

$$\begin{aligned}i(X)\langle \alpha, \beta \rangle &= i(X)d\alpha \wedge \beta + i(X)d\beta \wedge \alpha \\ &= L_X\alpha \wedge \beta + L_X\beta \wedge \alpha \\ &= f\alpha \wedge \beta + g\beta \wedge \alpha \\ &= -(g - f)\alpha \wedge \beta.\end{aligned}$$

よって，$g - f > 0 \Longleftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle > 0$.

(向きの入れ方に注意。局所的に，$i(X)\gamma = 1$ なる γ に対して，$\alpha\wedge\beta\wedge\gamma < 0$ である。)

次に，一般の場合を考える。

まず，E^u と E^s が直交し $T\phi$ 方向には C^∞ 級となる連続なリーマン計量を入れ，そのリーマン計量を M 全体で C^∞ 級のリーマン計量 $\|\cdot\|$ で近似する。すると，このリーマン計量について

$$\frac{\|d\phi^t(v_p^u)\|}{\|d\phi^t(v_p^s)\|} \geq D\exp(Ct)\frac{\|v_p^u\|}{\|v_p^s\|}$$

が任意の $t > 0$，$p \in M$，$v_p^u \in E_p^{uu}$ 及び $v_p^s \in E_p^{ss}$ に対して成立する。近似を良くすれば，C の値を変えずに D をいくらでも 1 に近づけられる。

このリーマン計量に対して，前半部分と同様に E^u 及び E^s を定める 1 形式 α 及び β を $\|\alpha\| = 1$，$\|\beta\| = 1$ となるようにとる。ここで，plane field $\widetilde{\xi}$ を $\ker(\alpha+\beta)$ で定める。すると，$\widetilde{\xi}$ は E^u 及び E^s にほぼ 45° で交わり，次のように接触構造に近い性質を持つ。

$TM_p/T\phi_p$ には，M 及び ϕ の向きにより，自然に向きが入る。また，リーマン計量によるノルムも入っているので，角度が定義できる。$(d\phi^{-t}\widetilde{\xi}_{\phi^t(p)})_p/T\phi_p$ が $\widetilde{\xi}_p/T\phi_p$ に対してなす角を $\widetilde{\theta}(t,p)$ と書く。$U(\theta) = 1/\tan(\theta+45^\circ)$ とおき，$U(\widetilde{\theta}(t,p)) = \widetilde{U}(t,p)$ と書くことにする。これにより，各点 $p \in M$ 上の $TM_p/T\phi_p = \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ に座標が入ったことになる。この座標について，

$$d\phi^{-t} : TM_{\phi^t(p)}/T\phi_{\phi^t(p)} \to TM_p/T\phi_p$$

を $\left(\begin{smallmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ と思うと，$\left(\begin{smallmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{smallmatrix}\right)$ は $\left(\begin{smallmatrix} P(t)^{1/2} & 0 \\ 0 & P(t)^{-1/2} \end{smallmatrix}\right)$ で近似できる。ただし，

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\|d\phi^t(v_p^u)\|}{\|d\phi^t(v_p^s)\|} \Big/ \frac{\|v_p^u\|}{\|v_p^s\|} \\ &\geq D\exp(Ct) \qquad\qquad (t > 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

とおく。

特に，b_t，c_t を 0 に C^1-close になるようにとっておく。定義より

$$\widetilde{U}(t,p) = \frac{a_t + b_t}{c_t + d_t}$$

なので，$\widetilde{U}(0,p) = 1$，$\widetilde{U}(t,p) \geq D'\exp(Ct)$ と書ける。ここで D' は D に十分近い定数である。

$T = (-\log D + 1)/C$ として T をとると，任意の点 $p \in M$ に対して $2 < U(t,p) < \infty$ となる。この T に対して，$\delta\theta_p = U^{-1}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{U}(t,p)dt\right)$ とおく。各点 p 上で，$\widetilde{\xi}_p$ に対して角度 $\delta\theta_p$ をなすように $\xi_p \subset TM_p/T\phi_p$ をとる。すると，ξ は接触構造になる $(*)$。

$\alpha-\beta$ に対しても，同様に接触構造 η を作れば，(ξ,η) は双接触構造になる。 ■

(∗) の証明　$(d\phi^{-t}\xi_{\phi^t(p)})_p/T\phi_p$ が $\widetilde{\xi}_p/T\phi_p$ に対してなす角を $\theta(t,p)$ と書き，$U(\theta(t,p))=U(t,p)$ と書くことにする。

以下，簡単のために，$\dfrac{a_tx+b_t}{c_tx+d_t}$ を $f_t(x)$ と書く。

すると，

$$U(0,\phi^{t_0}(p))=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}{f_{t_0}}^{-1}(\widetilde{U}(t))dt$$

となるので，

$$U(t_0,p)=f_{t_0}\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}{f_{t_0}}^{-1}(\widetilde{U}(t))dt\right)$$

である。

また，

$$\frac{\partial}{\partial t}f_t(x)|_{t=0}=-c'x^2+(a'-d')x+b' \qquad \frac{\partial}{\partial x}f_t(x)|_{t=0}=1$$
$$\frac{\partial}{\partial t}{f_t}^{-1}(x)|_{t=0}=c'x^2+(-a'+d')x-b' \qquad \frac{\partial}{\partial x}{f_t}^{-1}(x)|_{t=0}=1$$

である。ただし，

$$\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_t & b_t\\ c_t & d_t\end{pmatrix}|_{t=0}$$

である。また，$g(x)=c'x^2+(-a'+d')x-b'$ とおく。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_0}U(t_0,p)|_{t=0}&=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial}{\partial s}{f_s}^{-1}(\widetilde{U}(t,p))|_{s=0}dt\\&\quad+\frac{1}{T}\left(f_0(\widetilde{U}(T,p))-f_0(\widetilde{U}(0,p))\right)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial s}f_s\left(\frac{1}{T}\int_0^T\widetilde{U}(t,p)dt\right)|_{s=0}\\&=g\left(\frac{1}{T}\int_0^T\widetilde{U}(t,p)dt\right)\\&\quad-\frac{1}{T}\int_0^Tg(\widetilde{U}(t,p))dt\\&\quad+\frac{1}{T}\left(\widetilde{U}(T,p)-\widetilde{U}(0,p)\right)\\&=c'\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T\widetilde{U}(t,p)dt\right)^2-\frac{1}{T}\int_0^T\left(\widetilde{U}(t,p)\right)^2dt\right]\\&\quad+\frac{1}{T}\left(\widetilde{U}(T,p)-\widetilde{U}(0,p)\right).\end{aligned}$$

第 2 項は $1/T$ より大きい。また，c' が 0 に，$\widetilde{U}(t,p)$ が $P(t)$ にそれぞれ C^0 近似できているので，第 1 項は 0 に近い。

以上より

$$\frac{\partial}{\partial t_0}U(t_0,p)|_{t_0=0} > 0$$

なので，ξ は接触構造である。 ■

前半の証明部分より，次の系が成立する。

系 3.11 α，β を M 上の余次元 1 の葉層構造を定める 1 形式で $\langle\alpha,\beta\rangle > 0$ をみたすとする。このとき，$T\phi = \ker\alpha \cap \ker\beta$ をみたす任意の flow ϕ^t は射影的アノソフ流である。ϕ^t の (不) 安定葉層 E^u，E^s は $\ker\alpha$，$\ker\beta$ によって定められる。

逆に，M 上の双接触構造は射影的アノソフ流を定める。

定理 3.12 ([M1][ET][N3]) (ξ_+,ξ_-) を M 上の双接触構造とする。このとき M 上の flow ϕ^t で，$T\phi = \xi_+ \cap \xi_-$ をみたすものは射影的アノソフ流である。

この定理を示すのに，次の補題を準備する。

補題 3.13 ($\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の補題[M1]) 任意の $\varepsilon > 0$ と正整数 k に対し

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad i = 1,\dots,k$$

が $a_i, b_i, c_i, d_i \geq \varepsilon$ をみたすならば，

$$\mathrm{Tr}(A_1 \cdot \cdots \cdot A_k) \geq 2(1+\varepsilon^2)^{k/2}$$

が成り立つ。

証明 ([N3])

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A_1 \cdot \cdots \cdot A_k) &\geq a_1 \cdot \cdots \cdot a_k + d_1 \cdot \cdots \cdot d_k \\
&\geq 2\sqrt{a_1 \cdot \cdots \cdot a_k \cdot d_1 \cdot \cdots \cdot d_k} \\
&= 2\sqrt{(1+b_1c_1) \cdot \cdots \cdot (1+b_kc_k)} \\
&\geq 2(1+\varepsilon^2)^{k/2}.
\end{aligned}$$

■

定理 **3.12** の証明　X に横断的な plane field ν をとる。(ν, X) が多様体 M の向きを定めるように ν に向きを入れる。$\lambda_\pm := \xi_\pm \cap \nu$ とおく。また，$\lambda^t_\pm(p)$ を

$$(d\phi^{-t}(\xi_\pm))_p \cap \nu_p$$

で定める。$\lambda^0_\pm(p)$ と $\lambda^t_\pm(p)$ のなす角を $\theta^t_\pm(p)$ と書く。接触構造の性質より，

$$\frac{d\theta^t_+(p)}{dt} < 0, \qquad \frac{d\theta^t_-(p)}{dt} > 0, \qquad {}^\forall p \in M, {}^\forall t \in \mathbb{R}.$$

$d\phi^{-t}$ を $P(TM_{\phi^t(p)}/T\phi_{\phi^t(p)})$ から $P(TM_p/T\phi_p)$ への写像とみなすと，自然に $PSL(2,R)$ の元とみなすことができる。特に，ξ_+，ξ_- をそれぞれ $P(TM/T\phi)$ の第一，第二座標としてとれば，コンパクト性からある $\varepsilon > 0$ が存在し，全ての $p \in M$ に対して

$$d\phi^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad a, b, c, d \geq \varepsilon$$

となる。$k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k = \phi^k(p)$ とおく。補題 3.13 より $d_{p_k}\phi^{-k}$ は二つの固有ベクトルを持ち，拡大，縮小の固有値がそれぞれ $(1+\varepsilon^2)^{k/2}$ 以上，$(1+\varepsilon^2)^{-k/2}$ 以下だとわかる。よって，$P(TM_p/T\phi_p)$ の元として

$$E^s_p = \lim_{k\to\infty} d_{p_k}\phi^{-k}(\xi_+) = \lim_{k\to\infty} d_{p_k}\phi^{-k}(\xi_-)$$

が一意に定まる。これは $P(TM/T\phi)$ の連続な section E^s を定め，E^s は ϕ^t で不変である。

向きを逆にすると同様にして E^u が定まる。命題 3.4 より，ϕ^t は射影的アノソフ流である。 ■

注 **3.14** 射影的アノソフ流の定義にはリーマン計量が用いられているが，実際に定義に影響を与えているのは二つのベクトル $v^u_p \in E^{uu}$，$v^s_p \in E^{ss}$ のノルムの比 $\dfrac{\|v^u_p\|}{\|v^s_p\|}$ である。一方，点 p 上で $T\phi_p$ を含み E^u，E^s に横断的な tangent plane ξ_p を考える。ξ_p を $\ker\omega_p$ とあらわすと，ω_p には定数倍の自由度があるが $\dfrac{\omega_p(v^u_p)}{\omega_p(v^s_p)}$ の値は ω_p のとり方によらず決まり，

$$\frac{\omega_p(av^u_p)}{\omega_p(bv^s_p)} = \frac{a}{b}\,\frac{\omega_p(v^u_p)}{\omega_p(v^s_p)}$$

をみたす。特に，ξ_p を E^u と $\pm 45^\circ$ をなすようにとると，

$$\frac{\|v^u_p\|}{\|v^s_p\|} = \left|\frac{\omega_p(v^u_p)}{\omega_p(v^s_p)}\right|$$

となる。よって，射影的アノソフ流の定義の条件は次のように書きなおせる。

$T\phi \subset \xi$ をみたす連続な plane field ξ が存在して，

$$\left|\frac{\omega_{\phi^t(p)}(d\phi^t(v_p^u))}{\omega_{\phi^t(p)}(d\phi^t(v_p^s))}\right| \geq \exp(Ct)\left|\frac{\omega_p(v_p^u)}{\omega_p(v_p^s)}\right|. \tag{3}$$

ただし，$\ker\omega_q = \xi_q$ である。

さらに，$\dfrac{\omega_{\phi^t(p)}(d\phi^t(v_p^u))}{\omega_{\phi^t(p)}(d\phi^t(v_p^s))}$ の符号は変わらないので，不等式(3) は絶対値をはずして

$$\frac{\omega_{\phi^t(p)}(d\phi^t(v_p^u))}{\omega_{\phi^t(p)}(d\phi^t(v_p^s))} \Big/ \frac{\omega_p(v_p^u)}{\omega_p(v_p^s)} \geq \exp(Ct)$$

と書いてもよい。

このような ξ に対して補題 3.9 と同様に，X に横断的な plane field ν をとり，(ν, X) が多様体 M の向きを定めるように ν に向きを入れる。$\lambda = \xi \cap \nu$ とおく。また，$\lambda^t(p)$ を $(d\phi^{-t}\xi)_p \cap \nu_p$ で定める。$\lambda^0(p)$ と $\lambda^t(p)$ のなす角を $\theta^t(p)$ と書く。すると，定義より $\theta^t(p)$ は t について単調に変化する。特に，ξ が C^1 級ならば，補題 3.9 より ξ は接触構造となる。また，C^1 でないときも，定理 3.10 の証明のように，C^1 の plane field で近似してから flow 方向に平均化すれば接触構造が得られる。

4 射影的アノソフシステム

この章の内容は指導教官である坪井俊教授との共同研究によるものである。

3 次元多様体上の射影的アノソフ流が接触構造を導いたように，$2n+1$ 次元多様体の上の何らかの作用で，接触構造を導くものを定義したい。

M を閉じた $(2n+1)$ 次元多様体とし，$\phi^{\boldsymbol{t}} : M \to M$ $(\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n)$ を M 上の C^∞ 級で非特異な $\mathbb{R}^n$-作用とする。$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とする。

定義 4.1 (pA system) $\phi^{\boldsymbol{t}}$ は以下の条件をみたすとき射影的アノソフシステム (pA system) と呼ばれる。M 上の連続なリーマン計量 $\|\cdot\|$，連続な invariant splitting $TM/T\phi = E^1 \oplus \cdots \oplus E^{n+1}$ 及び定数 $C > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned} \frac{\|d\phi^{te_k}(v^k)\|}{\|d\phi^{te_k}(v^i)\|} &\geq \exp(Ct)\frac{\|v^k\|}{\|v^i\|} \\ \frac{\|d\phi^{te_k}(v^{k+1})\|}{\|d\phi^{te_k}(v^i)\|} &\leq \exp(-Ct)\frac{\|v^{k+1}\|}{\|v^i\|} \\ \frac{\|d\phi^{te_k}(v^j)\|}{\|d\phi^{te_k}(v^i)\|} &= \frac{\|v^j\|}{\|v^i\|} \end{aligned}$$

が任意の $1 \leq k \leq n$，$i,j \in \{1, \ldots, k-1, k+2, \ldots, n+1\}$，$t > 0$，$p \in M$ 及び $v^\sigma \in E^\sigma_p$ に対して成り立つ。(σ は $\{1, \ldots, n+1\}$ を動く。以下でも同様。)

さらに $1 \leq i \leq n+1$ に対して，hyperplane field $\mathcal{E}^i$ を

$$\mathcal{E}^i = E^1 \oplus \cdots \oplus \widehat{E^i} \oplus \cdots \oplus E^{n+1} \oplus T\phi$$

で定める。全ての $\mathcal{E}^i$ が C^1 級の葉層構造を定めるとき，$\phi^{\boldsymbol{t}}$ をレギュラーな射影的アノソフシステムと呼ぶ。

注 4.2 定義 4.1 の不等式部分は次のように書きなおせる。

任意の $1 \leq k \leq n$，$p \in M$，$v^\sigma \in E^\sigma_p$ に対して，関数 $P, U, S : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在して，

$$\begin{pmatrix} \|d\phi^{te_k}(v^1)\| \\ \|d\phi^{te_k}(v^2)\| \\ \vdots \\ \|d\phi^{te_k}(v^k)\| \\ \|d\phi^{te_k}(v^{k+1})\| \\ \vdots \\ \|d\phi^{te_k}(v^{n+1})\| \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} \|v^1\| \\ \|v^2\| \\ \vdots \\ U(t)\|v^k\| \\ S(t)\|v^{k+1}\| \\ \vdots \\ \|v^{n+1}\| \end{pmatrix}$$

をみたし，$U(t) \geq \exp(Ct)$，$S(t) \leq \exp(-Ct)$ が $t > 0$ で成立。

また，常に $P(t) = 1$ ととれるとき，$\phi^{\boldsymbol{t}}$ をアノソフシステムと呼ぶことにする。

例 4.3 (T^{n+1} の懸垂[Ge][TY]) A_1 , ... , A_n を $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{Z})$ の可換な元とし , 準同型 $\mathbb{Z}^n \to \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{Z})$, $e_i \mapsto A_i$ が単射とする。ただし , $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$ である。$\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ を $N = \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$ 上の対応する微分同相とする。多様体 M を $M = N \times \mathbb{R}^n/\sim$ で定める。ただし $(x,y) \sim (\bar{A}_i(x), y+e_i)$, $1 \le i \le n$ とする。また , M 上の $\mathbb{R}^n$-作用を $\phi^{\boldsymbol{t}} : [(x,y)] \mapsto [(x, y+\boldsymbol{t})]$ で定める。第 3 章のときと同様に M を mapping torus , $\phi^{\boldsymbol{t}}$ を $\bar{A}_1$, ... , $\bar{A}_n$ の懸垂と呼ぶ。このとき , $\phi^{\boldsymbol{t}}$ はレギュラーなアノソフシステムである。

例 4.4 ($S^n \times T^{n+1}$ の例) 定数 $a_i^+ > a_i^- > 0$ $(1 \le i \le n)$ 及び b_1 , ... , $b_{n+1} > 1$ を固定する。$N = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ とする。ただし , $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (b_1 x_1, \ldots, b_{n+1} x_{n+1})$ である。また ,

$$f_i : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, a_i^+ x_i, a_i^- x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

によって $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の微分同相を定める。各 f_i は N 上の微分同相 $\bar{f}_i$ を定める。ここで , $\bar{f}_1$, ... , $\bar{f}_n$ の mapping torus M 及び懸垂 $\phi^{\boldsymbol{t}}$ をとると , $\phi^{\boldsymbol{t}}$ は M 上のレギュラーな射影的アノソフシステムである。

この例は各 i に対して , $E^i \oplus T\phi$ の積分多様体でコンパクトなものがあるのでアノソフシステムではない。

以下 , $\mathcal{E}_1$, ... , $\mathcal{E}_{n+1}$ が transversely oriented のときを考える。そうでないときも適当な回数二重被覆をとれば transversely oriented にできる。

定理 4.5 射影的アノソフシステムを定めるリーマン計量が C^1 級で , 各 $\mathcal{E}^i$ が C^1 級の 1 形式で定まる hyperplane field ならば , おのおのが $\mathcal{E}^1$, ... , $\mathcal{E}^{n+1}$ を定める 1 形式 α_1 , ... , α_{n+1} で , $\omega = q_1\alpha_1 + \cdots + q_{n+1}\alpha_{n+1}$, $q_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が接触構造を定める 1 形式となるようなものがとれる。

証明 リーマン計量を smooth にとり直す。1 形式 α_1 , ... , α_{n+1} を $\|\alpha_1\| = \cdots = \|\alpha_{n+1}\| = 1$ と正規化する。点 $p \in M$ をとり , p を原点とする座標近傍 $U = \{(x,y) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n)\}$ を次をみたすように入れる。

$$\phi^{\boldsymbol{t}}(x,y) = (x, y+\boldsymbol{t})$$
$$\mathcal{E}^i|_{x=0} = \ker(dx_i).$$

すると , p を含む orbit 上で $\alpha_i|_{x=0} = f_i(y)dx_i$ と書ける。$f_i > 0$, $f_i(0) = 1$ としてよい。一方 , orbit の垂直方向には

$$\alpha_i|_{y=0} = \sum_{k=1}^{n+1} h_i^k(x)\, dx_k, \qquad h_i^k(0) = \delta_{i,k}$$

と書けている。

1 形式は正規化してあるので，射影的アノソフシステムの定義より，

$$\begin{pmatrix} f_1(te_k) \\ f_2(te_k) \\ \vdots \\ f_k(te_k) \\ f_{k+1}(te_k) \\ \vdots \\ f_{n+1}(te_k) \end{pmatrix} = P_k(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ U_k(t) \\ S_k(t) \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

で，$U_k(t) \geq \exp(Ct)$，$S_k(t) \leq \exp(-Ct)$ が $t > 0$ で成立。

ここで，

$$\widetilde{P}(t_1, \ldots, e_n) = P_1(t_1) \ldots P_n(t_n)$$
$$g_i(y) = \frac{f_i(y)}{\widetilde{P}(y)}$$
$$\beta_i(x, y) = \frac{\alpha_i(x, y)}{\widetilde{P}(y)}$$

とおく。

$$\beta_i|_{x=0} = g_i(y)\, dx_i$$
$$\beta_i|_{y=0} = \sum_{k=1}^{n+1} h_i^k(x)\, dx_k$$

であり，$2 \leq k \leq n$ に対しては，

$$\begin{pmatrix} g_k(te_1) \\ g_k(te_2) \\ \vdots \\ g_k(te_{k-1}) \\ g_k(te_k) \\ \vdots \\ g_k(te_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ S_{k-1}(t) \\ U_k(t) \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$k = 1$，$n + 1$ に対しては

$$g_1(te_1) = U_1(t), g_1(te_2) = \cdots = g_1(te_n) = 1$$
$$g_{n+1}(te_1) = \cdots = g_{n+1}(te_{n-1}) = 1, g_{n+1}(te_n) = S_n(t)$$

となる。

ここで，$u_i = U_i'(0)$，$s_i = -S_i'(0)$ と置く。u_i，$s_i \geq C$ である。微分を計算すると，

$$
\begin{aligned}
(d\beta_1)_p &= u_1 dy_1 \wedge dx_1 + \sum_{1\leq j,k\leq n+1} \frac{\partial h_1^k(0)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k \\
(d\beta_2)_p &= u_2 dy_2 \wedge dx_2 - s_1 dy_1 \wedge dx_2 + \sum_{1\leq j,k\leq n+1} \frac{\partial h_2^k(0)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k \\
(d\beta_3)_p &= u_3 dy_3 \wedge dx_3 - s_2 dy_2 \wedge dx_3 + \sum_{1\leq j,k\leq n+1} \frac{\partial h_3^k(0)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k \\
&\vdots \\
(d\beta_n)_p &= u_n dy_n \wedge dx_n - s_{n-1} dy_{n-1} \wedge dx_n + \sum_{1\leq j,k\leq n+1} \frac{\partial h_n^k(0)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k \\
(d\beta_{n+1})_p &= - s_n dy_n \wedge dx_{n+1} + \sum_{1\leq j,k\leq n+1} \frac{\partial h_{n+1}^k(0)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k
\end{aligned}
$$

となる。

以上のことから，

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \rangle_p &= \widetilde{P}(0)^{n+1} \langle \beta_1, \ldots, \beta n+1 \rangle_p \\
&= (-1)^{n+1} S\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge dx_{n+1}
\end{aligned}
$$

と書ける。ここで，

$$
\begin{aligned}
S = \;& s_1 s_2 s_3 \ldots s_n \\
&+ u_1 s_2 s_3 \ldots s_n \\
&+ u_1 u_2 s_3 \ldots s_n \\
&+ \cdots \\
&+ u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \\
>& 0
\end{aligned}
$$

である。

さらに，$i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対して $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$ が $\{1, \ldots, n+1\}$ の置換になっているとき以外は

$$\beta_{i_1} \wedge d\beta_{i_2} \wedge \cdots \wedge d\beta_{i_{n+1}} = 0$$

となる。よって

$$\omega \wedge (d\omega)^n = n!\, q_1 \ldots q_{n+1} \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \rangle$$

より，ω は接触形式である。 ■

第 3 章で用いた接触構造の性質は $2n+1$ 次元に拡張しても成立する。

命題 4.6 (実 $2n+1$ 次元接触構造の性質) ξ を M 上の hyperplane field，ϕ^t を M 上の非特異な $\mathbb{R}^n$-作用とし，$T\phi \subset \xi$ とする。点 $p \in M$ を一つとると，$\phi^{\boldsymbol{t}}$ の orbit を含む hyperplane field の点 p 上のファイバー $P(TM_p/T\phi_p)$ は，$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と同相である。$\xi^{\boldsymbol{t}}(p) \in P(TM_p/T\phi_p)$ を $(d\phi^{-\boldsymbol{t}}\xi)_p$ で定める。このとき，ξ が接触構造である必要十分条件は任意の点 p に対して写像 $A : \boldsymbol{t} \mapsto \xi^{\boldsymbol{t}}(p)$，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ のヤコビ行列式が各点で消えないことである。

証明　任意の点 p に対して写像 $A : \boldsymbol{t} \mapsto \xi^{\boldsymbol{t}}(p)$，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ のヤコビ行列式が各点で消えないことと，$\boldsymbol{t} = 0$ で消えないこととは同値である。

点 $p \in M$ を固定して，p を原点とする座標近傍

$$U = \{(x, y)\} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n)\}$$

を次の条件をみたすようにとる。

$$\phi^{\boldsymbol{t}}((x, y)) = (x, y + \boldsymbol{t})$$
$$\xi = \ker \alpha$$
$$\alpha = f_1 dx_1 + \cdots + f_{n+1} dx_{n+1}$$
$$f_1(p) = \cdots = f_n(p) = 0, f_{n+1}(p) = 1$$

すると，$(d\phi^{-\boldsymbol{t}}\xi)_p = \ker(f_1(0, \boldsymbol{t})dx_1 + \cdots + f_{n+1}(0, \boldsymbol{t})dx_{n+1})$ である。すると，$A : \boldsymbol{t} \mapsto [f_1(0, \boldsymbol{t}) : \cdots : f_{n+1}(0, \boldsymbol{t})]$ と書ける。第 $n+1$ 座標だけ無視するという正射影による座標をいれると，この写像の $\boldsymbol{t} = 0$ でのヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(0,0) \end{pmatrix}$$

と書ける。

一方，原点での交代双線形形式 $d\alpha_p : \xi_p \times \xi_p \to \mathbb{R}$ は

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0,0) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(0,0) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と置いたときに

$$A - {}^tA = \begin{pmatrix} * & J \\ -{}^tJ & 0 \end{pmatrix}$$

で表される。

$|A - {}^tA| = |J|^2$ より，ξ が接触構造であることと，任意の点 p に対して写像 $A : \boldsymbol{t} \mapsto \xi^{\boldsymbol{t}}(p)$，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ のヤコビ行列式が $\boldsymbol{t} = 0$ で消えないこととが同値であることがわかる。 ■

5 射影的アノソフ流の複素化

この章では特に断らない限り，写像やベクトル場などは，すべて正則なものを扱う。M を複素 3 次元閉多様体，ϕ^τ を M 上の非退化な正則ベクトル場 X によって定まる正則な flow とする。

5.1 正則射影的アノソフ流

定義 5.1 (hpA flow) ϕ^τ は以下の条件をみたすとき正則射影的アノソフ流 (hpA flow) と呼ばれる。M 上のエルミート計量 $\|\cdot\|$，連続な invariant splitting $T_{\mathbb{R}}M/T_{\mathbb{R}}\phi = E^{uu} \oplus E^{ss}$ (E^{uu} 及び E^{ss} は $T_{\mathbb{R}}M/T_{\mathbb{R}}\phi$ の実 2 次元部分束) 及び定数 $C_1 > 0$，$0 < C_2 < 1$ が存在して，

$$\frac{\|d\phi^\tau(v_p^u)\|}{\|d\phi^\tau(v_p^s)\|} \geq C_2 \exp(C_1 \Re\tau) \frac{\|v_p^u\|}{\|v_p^s\|}$$

が任意の $\tau \in \mathbb{C}$，$p \in M$，$v_p^u \in E_p^{uu}$，$v_p^s \in E_p^{ss}$ に対して成り立つ。

この定義は Ghys によって定義された正則アノソフ流の一般化である。

定義 5.2 (hA flow [Gh]) ϕ^τ は以下の条件をみたすとき正則アノソフ流 (hA flow) と呼ばれる。M 上のエルミート計量 $\|\cdot\|$，連続な invariant splitting $T_{\mathbb{R}}M = E^{uu} \oplus E^{ss} \oplus T_{\mathbb{R}}\phi$ (E^{uu} 及び E^{ss} は $T_{\mathbb{R}}M$ の実 2 次元部分束) 及び定数 $C_1 > 0$，$0 < C_2 < 1$ が存在して，

$$\|d\phi^\tau(v^u)\| \geq C_2 \exp(C_1 \Re\tau)\|v^u\|$$
$$\|d\phi^\tau(v^s)\| \leq {C_2}^{-1} \exp(-C_1 \Re\tau)\|v^s\|$$

が任意の $\tau \in \mathbb{C}$，$p \in M$，$v^u \in E_p^{uu}$，$v^s \in E_p^{ss}$ に対して成り立つ。

命題 5.3 ([Gh]) 正則射影的アノソフ流の E^{uu}，E^{ss} は $T_{\mathbb{C}}M/T_{\mathbb{C}}\phi$ の複素部分束である。つまり，$i = \sqrt{-1}$ 倍しても不変である。

証明　任意の $v_p \in TM/T\phi$ に対して

$$\|iv_p\| = \|v_p\|$$
$$\|d\phi^\tau(iv_p)\| = \|id\phi^\tau(v_p)\| = \|d\phi^\tau(v_p)\|$$

より明らか。 ∎

次の二つの命題は Ghys によるものである。

命題 5.4 ([Gh]) ϕ^τ が正則アノソフ流ならば，正の実数 $k > 0$ が存在して $\phi^{ki} = \mathrm{id}_M$ となる。

証明　real flow ϕ^{it}，$t \in \mathbb{R}$ は明らかに一様同程度連続なので，*diff* M のなかで $\{\phi^{it} | t \in \mathbb{R}\}$ の閉包はトーラス T^l をなし，その各元は ϕ^τ と可換である。$t \mapsto f^t$，$(-\varepsilon, \varepsilon) \to T^l$，$f^0 = \mathrm{id}_M$ で T^l の曲線を表し，orbit $T^l(p)$ の点 p における接ベクトルを

$$v_p = \lim_{t \to 0} \frac{f^t(p) - p}{t}$$

と表すと，

$$\begin{aligned} d\phi^\tau(v_p) &= \lim_{t \to 0} \frac{\phi^\tau \circ f^t(p) - \phi^\tau(p)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f^t(\phi^\tau(p)) - \phi^\tau(p)}{t} \end{aligned}$$

である。$v_p \in T\phi_p$ である。

このことより，$T^l(p)$ は ϕ^τ の orbit に含まれることがわかる。$l = 2$ とすると，実数部分が正の $\tau \in \mathbb{C}$ で $\phi^\tau(p) \in T^l(p)$ をみたすものがある。$\phi^\tau(p) = f(p)$，$f \in T^l$ とすると，T^l の性質より $v_p^u \in E_p^{uu}$ に対して，$d\phi^\tau(v_p^u) = df(v_p^u)$ がいえる。これは同程度連続性に反する。

以上より $l = 1$ がわかる。よって ϕ^{it}，$t \in \mathbb{R}$ は周期的である。 ∎

命題 5.5 ([Gh]) ϕ^τ が正則アノソフ流ならば，E^u，E^s は正則な葉層構造を定める。

証明　まず，正則アノソフ写像について示す。M を複素平面，ϕ を M 上の正則アノソフ写像とする。すなわち，M 上のエルミート計量 $\|\cdot\|$，連続な invariant splitting $T_M = E^u \oplus E^s$ 及び定数 $C_1 > 0$，$0 < C_2 < 1$ が存在して，

$$\begin{aligned} \|d\phi^k(v^u)\| &\geq C_2 \exp(C_1 k) \|v^u\| \\ \|d\phi^k(v^s)\| &\leq {C_2}^{-1} \exp(-C_1 k) \|v^s\| \end{aligned}$$

が任意の $k \in \mathbb{N}$，$p \in M$，$v^u \in E_p^u$，$v^s \in E_p^s$ に対して成り立つ。

$\mathcal{F}^u$，$\mathcal{F}^s$ を E^u，E^s の定める葉層構造とする。$\mathcal{F}^s$ の leaf L 上に異なる二点 x，y を任意にとる。$\mathcal{F}_x^u$，$\mathcal{F}_y^u$ を各点を通る $\mathcal{F}^u$ の leaf とする。V_x，V_y をそれぞれ $\mathcal{F}_x^u$，$\mathcal{F}_y^u$ における点 x，y の小さな近傍とする。これらは $\mathcal{F}^s$ に横断的な正則曲線とみなせる。

x，y を L 上の path で結び，h をこの path に沿った holonomy とする。h は x のコンパクトな近傍 $W_x \subset V_x$ で定義され，像 $W_y = h(W_x) \subset V_y$ は y の近傍であるとする。$\mathcal{F}$ の各 leaf は単連結なので，h は path のとり方によらない。

以下，h が正則写像であることを示す。

非負整数 k に対して $W_x^k = \phi^k(W_x)$，$W_y^k = \phi^k(W_y)$ とおく。定義より，$z \in W_x$ に対して $\phi^k(z)$ と $\phi^k(h(z))$ は $k \to \infty$ で互いに近づく。よって次の条件をみたす C^1 級写像 $\pi_k : W_x^k \to \pi_k(W_X^k) \subset \mathcal{F}^u_{\phi^k(y)}$ の列がとれる。

i) $\mathcal{F}^u_{\phi^k(y)}$ の上の二点 $\pi_k(z)$ と $\phi^k h \phi^{-k}(z)$ の距離が $k \to \infty$ で $z \in W^k_x$ によらず一様に 0 に収束する。
ii) 次の意味で，π_k が C^1 topology で identity に一様に収束する: $k \to \infty$ で 0 に収束する数列 $\varepsilon_k > 0$ が存在して，任意の W^k_x の接ベクトル v について

$$(1-\varepsilon_k)\|v\| \leq \|d\pi_k(v)\| \leq (1+\varepsilon_k)\|v\|.$$

が成立。

ここで，写像 $h_k = \phi^{-k}\pi_k\phi^k : W_x \to \mathcal{F}^u_y$ を考える。ϕ は各 leaf 上で等角写像なので，次の性質が成立する。

i) h_k は W_x から $h_k(W_x) \subset \mathcal{F}^u_y$ への $(1+\varepsilon_k)$-擬等角写像である。
ii) h_k は $k \to \infty$ で h に一様収束する。

以上より h は 1-擬等角，つまり正則である。よって $\mathcal{F}^s$ は横断的に正則である。

$\mathcal{F}^u$ についても同様の議論ができるので，$\mathcal{F}^s$ は横断的にだけでなく，真に正則な葉層構造をなす。

正則アノソフ流に対しても，同様の議論により $\mathcal{F}^s$ は正則な葉層構造となる。 ■

正則アノソフ流の例には次のようなものがある。

例 5.6 ($SL(2,\mathbb{C})$ の例[Gh]) Γ を $SL(2,\mathbb{C})$ の torsion-free なココンパクトな離散部分群とする。$M = SL(2,\mathbb{C})/\Gamma$ は 3 次元複素多様体である。$SL(2,\mathbb{C})$ への左移動 $\left(\begin{smallmatrix} e^\tau & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{smallmatrix}\right)$ による $\mathbb{C}$-作用を考えると，この作用は右移動と可換なので M 上の $\mathbb{C}$-作用を定める。この作用は正則アノソフ流である。

例 5.7 (トーラスの懸垂[Gh]) $\mathbb{C}^2$ の lattice Λ を保つ $A \in GL(2,\mathbb{C})$ を考える。$\bar{A}$ を $N = C^2/\Lambda$ 上の対応する微分同相とする。$\eta \in \mathbb{C}$，$\Re(\eta) \neq 0$ をとり，$\mathbb{C}^2/\Lambda \times \mathbb{C}$ 上の微分同相

$$(x,y) \in \mathbb{C}^2/\Lambda \times \mathbb{C} \mapsto (\bar{A}(x), y+\eta) \in \mathbb{C}^2/\Lambda \times \mathbb{C}$$
$$(x,y) \in \mathbb{C}^2/\Lambda \times \mathbb{C} \mapsto (x, y+2\pi i) \in \mathbb{C}^2/\Lambda \times \mathbb{C}$$

を考える。これらは互いに可換で，生成する群は $\mathbb{C}^2/\Lambda \times \mathbb{C}$ に真性不連続かつ自由に作用する。また，第 2 成分への自明な $\mathbb{C}$-作用とも可換である。よって，この群による商多様体は自然に $\mathbb{C}$-作用を持つ。A の固有値の絶対値がともに 1 以外ならばこの $\mathbb{C}$-作用は正則アノソフ流である。このようにしてできた商多様体を $\bar{A}$ の複素 mapping torus，$\mathbb{C}$-作用を $\bar{A}$ の複素懸垂と呼ぶ。

一方，正則射影的アノソフ流だが正則アノソフ流ではない例として，次のようなものがある。

例 5.8 ($S^3 \times T^3$ の例) $|a^+| > |a^-| > 0$，$|b_1|$，$|b_2| > 1$ をみたす定数をとる。$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を同値関係 $(x, y) \sim (b_1 x, b_2 y)$ で割った空間を N とおく。$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上の写像 $f : (x, y) \mapsto (a^+ x, a^- y)$ は同値関係 $\sim$ と compatible なので，自然に N 上の写像 $\bar{f}$ を定める。

$\bar{f}$ の複素懸垂には自然に正則射影的アノソフ流の構造が入る。つまり，$N \times \mathbb{C}$ 上の微分同相

$$([x, y], z) \in N \times \mathbb{C} \mapsto (\bar{f}([x, y]), z + \eta) \in N \times \mathbb{C}$$
$$([x, y], z) \in N \times \mathbb{C} \mapsto ([x, y], z + 2\pi i) \in N \times \mathbb{C}$$

を考えれば，これらは互いに可換で，生成する群は $N \times \mathbb{C}$ に真性不連続かつ自由に作用する。また，第 2 成分への自明な $\mathbb{C}$-作用とも可換である。よって，この群による商多様体 M は自然に $\mathbb{C}$-作用を持つ。このときこの $\mathbb{C}$-作用は正則射影的アノソフ流であるが，この $\mathbb{C}$-作用の (不) 安定葉層には $\mathbb{C}$-作用で不変であるコンパクトな leaf があるので，アノソフ流ではない。

正則接触構造に関しても，次の基本的な性質が成り立つ。

補題 5.9 (正則接触構造の性質) U を M の開集合とする。ξ を U 上の正則な plane field，ϕ^τ を U 上の非特異な flow とし，$T\phi \subset \xi$ とする。点 $p \in U$ を一つ固定する。flow の orbit を含む plane field の点 p 上のファイバー $P(TM_p/T\phi_p)$ は，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ と双正則同相である。$\xi^\tau(p) \in P(TM_p/T\phi_p)$ を $(d\phi^{-\tau}\xi)_p$ で定める。このとき，ξ が接触構造である必要十分条件は $\xi^\tau(p)$ を τ の正則関数とみなしたときの微分が定義されている範囲の任意の p，τ について消えないことである。

証明　点 p を原点とする正則な座標近傍 $\{x, y, z\}$ を次のようにとる。

$$\phi^\tau((x, y, z)) = (x, y, z + \tau)$$

ここで，$\xi^\tau(p) = \ker(f(\tau)dx + g(\tau)dy)$ と書けば点 p の orbit 上では $\xi = \ker \alpha$，$\alpha = f(z)dx + g(z)dy$ と書ける。orbit 上の各点において，

$$\alpha \wedge d\alpha = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))dx \wedge dy \wedge dz$$

なので，ξ が接触構造であることと正則写像 $\tau \mapsto [f(\tau) : g(\tau)] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の微分が消えないこととは同値である。 ∎

例 5.6，5.7，5.8 における正則射影的アノソフ流に対して，$T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則接触構造があるかどうかを考察する。

命題 5.10 例 5.6 の正則アノソフ流には Γ のとり方によらず $T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則接触構造がある。$\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ を座標系とし，正則 1 形式 $\alpha = -ydx + xdy$，$\beta = -wdz + zdw$ をとる。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ において，これらは正則な葉層構造を定め，Γ の右作用によって不変であり，$\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ なので $\alpha + q\beta$，$q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\Gamma$ 上の正則接触構造を定める。

$T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則接触構造は，この他には無い。

$T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則接触構造がこの他には無いことは，定理 5.18 から導かれる。

しかし，ほかの例においては $T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則接触構造は必ずしも存在しない。

命題 5.11 例 5.7 の正則アノソフ流上に正則な接触構造 ξ が存在する必要十分条件はある整数 n が存在して $e^{n\eta} = \lambda_2/\lambda_1$ をみたすことである。ここで，λ_1，λ_2 は A の固有値である。

証明　普遍被覆空間 $\widetilde{M} = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ 上で考える。A の固有値 λ_1，λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$ とし，$\mathbb{C}^2$ に座標系 $\{(z_1, z_2)\}$ を

$$\mathbb{C}^2 = \{z_1\boldsymbol{x_1} + z_2\boldsymbol{x_2} | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

によって入れる。$\mathbb{C}$ には自然な座標系 $\{z_3\}$ をいれ，$\widetilde{M}$ に直積による座標系 $\{(z_1, z_2, z_3)\}$ を入れる。ξ を局所的に正則 1 形式で $\xi = \ker \alpha$ と書くと，$\alpha = g_1 dz_1 + g_2 dz_2$，$g_1$，$g_2 \neq 0$ と書ける。正規化するために $g = g_1/g_2$ とおけば，

$$\alpha = g dz_1 + dz_2, \qquad g \neq 0$$

と書ける。このことから，α は局所的にだけでなく $\widetilde{M}$ 全体でこの形で書けることがわかる。

ξ が接触構造である必要十分条件は $\frac{\partial}{\partial z_3} g \neq 0$ である。

一方，α が M 上で well-defined であることから，順に次のことがいえる。

まず，$\ker \alpha$ が $\mathbb{C}^2$ に対する Λ の作用で不変なので，g も Λ による並行移動により不変。つまり，$\mathbb{C}^2$ 方向には二重周期関数となる。よって，$\mathbb{C}^2$ 方向には定数となり，$g(z_1, z_2, z_3) = g(z_3)$ と書ける。

次に，

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, z_3 + \eta) \sim (z_1, z_2, z_3 + 2\pi i)$$

より，

$$g(z_3 + \eta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} g(0) \qquad g(z_3 + 2\pi i) = g(z_3)$$

がわかる。この条件をみたす g が存在する必要十分条件はある整数 n が存在して $e^{n\eta} = \lambda_2/\lambda_1$ をみたすことであり，このとき $g(z_3) = Ce^{nz_3}$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と書ける。

また，このとき定義より $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので $n \neq 0$。よって $\frac{\partial}{\partial z_3} g \neq 0$ となるので ξ は接触形式である。 ■

命題 5.12 例 5.8 の正則射影的アノソフ流上に正則な接触構造 ξ が存在する必要十分条件は $b_1 = b_2$ かつある整数 n が存在して $e^{n\eta} = a^+/a^-$ をみたすことである。

証明　命題 5.11 の証明と同様に，普遍被覆空間 $\widetilde{M} = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ 上で考える。自然な座標系 $\{(z_1, z_2, z_3)\}$ を入れる。同様にして $\widetilde{M}$ 全体で

$$\xi = \ker \alpha, \qquad \alpha = g dz_1 + dz_2, \qquad g \neq 0$$

と書ける。ξ が接触構造である必要十分条件は $\frac{\partial}{\partial z_3} g \neq 0$ である。

一方，α が M 上で well-defined であることから，順に次のことがいえる。

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (b_1 z_1, b_2 z_2, z_3)$$

より

$$g(b_1 z_1, b_2 z_2, z_3) = \frac{b_2}{b_1} g(z_1, z_2, z_3).$$

このような正則関数が存在するとき，$b_1 = b_2$ であり，g は $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 方向には不変である。つまり，$g(z_1, z_2, z_3) = g(z_3)$ と書ける。

次に，

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (a^+ z_1, a^- z_2, z_3 + \eta) \sim (z_1, z_2, z_3 + 2\pi i)$$

より，

$$g(z_3 + \eta) = \frac{a^-}{a^+} g(0), \qquad g(z_3 + 2\pi i) = g(z_3)$$

がわかる。この条件をみたす g が存在する必要十分条件はある整数 n が存在して $e^{n\eta} = a^-/a^+$ をみたすことであり，このとき $g(z_3) = Ce^{nz_3}$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と書ける。定義より $a^- \neq a^+$ なので $n \neq 0$。よって $\frac{\partial}{\partial z_3} g \neq 0$ となるので ξ は接触形式である。 ■

このように，正則射影的アノソフ流は必ずしもその上に正則な接触構造を保証しないことがわかった。

定理 5.13 ξ を M 上の接触構造，ϕ^τ を $T\phi \subset \xi$ をみたし，$2\pi i$ を周期とする正則な flow とする。この flow に closed orbit があるとする。つまり，$p \in M$，$\phi^\eta(p) = p$，$\Re\eta \neq 0$．このとき，次の極限がとれて，それぞれ正則な葉層構造を定める。

$$\xi^{\pm\infty} = \lim_{\Re\tau\to\pm\infty} d\phi^\tau(\xi).$$

証明　まず，点 $q \in M$ を一つ固定する。$\xi^\tau(q) \in P(TM_q/T\phi_q)$ を $(d\phi^{-\tau}\xi)_q$ で定める。仮定及び正則接触構造の性質 (補題 5.9) より，$\xi^\bullet(q) : \tau \mapsto \xi^\tau(q)$ は正則写像 $A_q : \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ とみなせる。

ここで，特に $p = q$ のときを考える。写像 $d\phi_p^{-\eta} : TM_p \to TM_p$ は複素線形写像なので，$P(TM_p/T\phi_p)$ には一次分数変換としてはたらく。対応する $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の写像を T で表すことにすると，$A_p(n\eta) = T^n(A_p(0))$ が成立する。これらの条件をみたすような写像 $A_p : \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は指数関数 $e^{k\tau}$，$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ と一次分数変換 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の合成によって，

$$A_p(\tau) = \frac{ae^{k\tau} + b}{ce^{k\tau} + d}$$

と書ける。

一方，$\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ は指数関数 $\tau \mapsto e^\tau$ によって $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ と双正則同相である。A_p に対応する $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ から $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ への写像を B_p とすれば，点 $0, \infty \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ はそれぞれ次数 $|k|$ の除去可能特異点である。ここで，任意の点 $q \in M$ に対して，$p(t)$，$t \in [0,1]$ を p，q を結ぶ path とする。すると，連続性により $B_p(t) : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{0, \infty\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ も点 $0, \infty \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ を次数 $|k|$ の除去可能特異点として持つ。よって，任意の点 q において，A_q は指数関数 $e^{k\tau}$ と一次分数変換の合成によって書ける。

定義により，$B_q(0)$，$B_q(\infty)$ がそれぞれ $\xi^{-\infty}$，$\xi^{+\infty}$ に対応する。$B_q(0)$，$B_q(\infty)$ はそれぞれ $d\phi^\tau$ の作用で不変であり，また，$P(TM/T\phi)$ の section として正則なので，正則な葉層構造を定める。 ∎

命題 5.14 α, β を M 上の 1-形式で，$\ker\alpha$ 及び $\ker\beta$ はそれぞれ葉層構造を定め，$\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0$ をみたすものとする。さらに ϕ^τ は周期 $2\pi i$ の正則な flow で，$T\phi = \ker\alpha \cap \ker\beta$ であり，closed orbit があるとする。つまり，$p \in M$，$\phi^\eta(p) = p$，$\Re\eta \neq 0$．このとき，ϕ^τ は正則射影的アノソフ流となる。

証明　まず，$E^\alpha = \ker\alpha/T\phi$，$E^\beta = \ker\beta/T\phi$ とおく。これらは明らかに連続な invariant splitting である。エルミート計量 $\|\cdot\|$ を，$T\phi$，E^α，E^β が垂直となり，$v_q \in TM/T\phi_q$，$q \in M$ に対して $\|v_q\| = \sqrt{|\alpha(v_q)|^2 + |\beta(v_q)|^2}$ となるように定める。

点 $q \in M$ を一つ固定して，$v_q^\alpha \in E_q^\alpha$，$v_q^\beta \in E_q^\beta$ を 0 でないようにとる。

$$A_q(\tau) = \frac{\beta(d\phi^\tau(v_q^\alpha))}{\alpha(d\phi^\tau(v_q^\beta))}$$

とおけば，$\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ より，${A_q}'(\tau) \neq 0$ がいえる。

A_q について定理 5.13 の証明と同様のことがいえるので，0 でない整数 k がとれて，

$$A_q(\tau) = C_q e^{k\tau}$$

と書ける。ここで，C_q は点 q によって決まる定数である。

一方，定義より

$$\frac{\|d\phi^\tau(v_q^\alpha)\|}{\|d\phi^\tau(v_q^\beta)\|} \Big/ \frac{\|v_q^\alpha\|}{\|v_q^\beta\|} = \left|\frac{A_q(\tau)}{A_q(0)}\right| = |e^{k\tau}|.$$

よって ϕ^τ は正則射影的アノソフ流である。 ■

5.2 強 L 流

一方，射影的アノソフ流の複素化として次のようなものも考えられる。

定義 5.15 (強 L 流) 非特異で正則な flowϕ^τ 及び正則な plane field ξ の対 (ϕ^τ, ξ) は以下の条件をみたすとき強 L 流と呼ばれる。$T\phi \subset \xi$ であり，連続な invariant splitting $T_{\mathbb{R}}M/T_{\mathbb{R}}\phi = E^{uu} \oplus E^{ss}$（$E^{uu}$ 及び E^{ss} は $T_{\mathbb{R}}M/T_{\mathbb{R}}\phi$ の実 2 次元部分束）が存在して，

$$\frac{\omega_{\phi^\tau(p)}(d\phi^\tau(v_p^u))}{\omega_{\phi^\tau(p)}(d\phi^\tau(v_p^s))} = \exp(\tau)\frac{\omega_p(v_p^u)}{\omega_p(v_p^s)}$$

が任意の $\tau \in \mathbb{C}$，$p \in M$，$v_p^u \in E_p^{uu}$，$v_p^s \in E_p^{ss}$ に対して成り立つ。ただし，$\ker \omega_q = \xi_q$ である。

この定義で，ω_p，$\omega_{\phi^\tau(p)}$ のとり方には定数倍だけの自由度があるが比をとっているのでどのようなとり方をしても定義には影響しない。

例 5.16 強 L 流の例として，次のようなものがある。

例 5.6 の正則アノソフ流 ϕ^τ と命題 5.10 による正則接触構造 ξ の対 (ϕ^τ, ξ) は強 L 流となる。

例 5.7 の正則アノソフ流 ϕ^τ に対して，命題 5.11 により，ある整数 n が存在して $e^{n\eta} = \lambda_2/\lambda_1$ をみたすとき正則接触構造 ξ がとれる。flow の虚数軸方

向の周期が $2\pi i$ となるように，$\psi^\tau = \phi^{\tau/n}$ と正規化すれば対 (ψ^τ, ξ) は強 L 流となる。

例 5.8 の正則アノソフ流 ϕ^τ に対して，命題 5.12 により，$b_1 = b_2$ かつある整数 n が存在して $e^{n\eta} = a^+/a^-$ をみたすとき正則接触構造 ξ がとれる。flow の虚数軸方向の周期が $2\pi i$ となるように，$\psi^\tau = \phi^{\tau/n}$ と正規化すれば対 (ψ^τ, ξ) は強 L 流となる。

ここに挙げた強 L 流 (ϕ^τ, ξ) の例はすべて ϕ^τ が正則射影的アノソフ流で ξ が正則接触構造となっている。

実際，(ϕ^τ, ξ) が強 L 流ならば ϕ^τ は正則射影的アノソフ流，ξ は正則接触構造となることが次のように示される。

定理 5.17 (ϕ^τ, ξ) が M 上の強 L 流のとき，ξ は M 上の接触構造である。また，$E^u = E^{uu} \oplus T\phi$，$E^s = E^{ss} \oplus T\phi$ は正則な葉層構造を定める。

証明　命題 5.3 と同様にして，E^{uu}，E^{ss} は $T_{\mathbb{C}}M/T_{\mathbb{C}}\phi$ の複素部分束である。まず，定義式より，

$$\frac{(\phi^\tau)^*(\omega_2)(v_p^u)}{(\phi^\tau)^*(\omega_2)(v_p^s)} = \exp(\tau)\frac{\omega_1(v_p^u)}{\omega_1(v_p^s)}.$$

一方，写像 $\ker\omega_p \mapsto \dfrac{\omega_p(v_p^u)}{\omega_p(v_p^s)}$ は $TM_p/T\phi_p$ から $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{0\}$ への正則同相写像である。このことと正則接触構造の性質 (補題 5.9) とから，ξ は接触構造である。

また，定理 5.13 の証明と同様にして，E^u，E^s が正則な葉層構造を定めることがわかる。 ∎

定理 5.18 (ϕ^τ, ξ) が M 上の強 L 流とする。M 上の $T\phi$ を含み E^u，E^s に横断的な正則 plane field 全体を Ξ とすると，$\Xi = \{d\phi^{-\tau}(\xi) | \tau \in \mathbb{C}\}$ である。特に，Ξ の元は全て正則接触構造であり，任意の $\xi_0 \in \Xi$ に対して，(ϕ^τ, ξ_0) は再び M 上の強 L 流である。また，Ξ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{\ 2 \text{ points}\ \}$ と同相である。

証明　$\xi_0 \in \Xi$ を任意にとる。点 $p \in M$ を任意にとり，その近傍 U を十分小さくとる。U 上の 1 形式 ω で $\xi = \ker\omega$ をみたすものを一つとる。すると，$\omega = \alpha + \beta$，$\ker\alpha = E^u$，$\ker\beta = E^s$ をみたす U 上の 1 形式 α，β が一意にとれる。さらに，$\xi_0 = \ker\omega_0$，$\omega_0 = \alpha + f_U\beta$ をみたす関数 $f_U : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が一意に決まる。作り方から f_U は正則であり，α，β のとり方によらず，また，f_U と f_V は $U \cap V$ において一致する。これらを接続して正則関数 $f : M \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を得るが，M はコンパクトなのでこのような正則関数は定数しかない。

このことは，Ξ の元は，一点 p における $P(TM_p/T\phi_p) \setminus \{E_p^{uu}, E_p^{ss}\}$ の元 (つまり，$T\phi_p$ を含む接複素平面で E_p^u，E_p^s 以外) を決めただけで定まってしまうことを意味する。

一方，$d\phi^{-\tau}(\xi)$，$\tau \in \mathbb{C}$ は明らかに Ξ の元であり，定理 5.17 の証明からわかるように，$(d\phi^{-\tau}(\xi))_p$ は $P(TM_p/T\phi_p) \setminus \{E^{uu}_p, E^{ss}_p\}$ の元全体を動く。よって $\Xi = \{d\phi^{-\tau}(\xi) | \tau \in \mathbb{C}\}$ である。

また，

$$\begin{aligned}\frac{\omega_0(v^u_p)}{\omega_0(v^s_p)} &= \frac{f\beta(v^u_p)}{\alpha(v^s_p)} \\ &= f\frac{\omega(v^u_p)}{\omega(v^s_p)}\end{aligned}$$

より，(ϕ^τ, ξ_0) は M 上の強 L 流である。 ■

命題 5.19 強 L 流は正則射影的アノソフ流である。

証明　Ω を $\ker\Omega = \xi$ をみたす M 上の C^∞ 級複素 1 形式 (必ずしも正則でなくてよい) とする。M 上の非退化な (必ずしも正則でない)C^∞ 級複素 1 形式 A，B で $\Omega = A + B$，$\ker A = E^u$，$\ker B = E^s$ をみたすものが一意にとれる。また，$T\phi$ に横断的な複素 plane field ν (これも必ずしも正則でなくてよい) をとる。エルミート計量 $\|\cdot\|$ を，$T\phi$ と ν が垂直で，$v_p \in \nu_p$ に対して $\|v_p\| = \sqrt{|A(v_q)|^2 + |B(v_q)|^2}$ となるように定める。すると定義より，

$$\begin{aligned}\frac{\|d\phi^\tau(v^u_p)\|}{\|d\phi^\tau(v^s_p)\|} &= \left|\frac{\Omega(d\phi^\tau(v^u_p))}{\Omega(d\phi^\tau(v^s_p))}\right| \\ &= \left|\frac{(\phi^\tau)^*(\Omega)(v^u_p)}{(\phi^\tau)^*(\Omega)(v^s_p)}\right| \\ &= \left|\exp(\tau)\frac{\Omega(v^u_p)}{\Omega(v^s_p)}\right| \\ &= \exp(\Re\tau)\frac{\|v^u_p\|}{\|v^s_p\|}\end{aligned}$$

となり，ϕ^τ は正則射影的アノソフ流となる。 ■

6 今後の課題

射影的アノソフシステムや正則射影的アノソフ流に関する未解決の問題を以下に挙げる。

射影的アノソフシステムに関する問題

問題 6.1 各 $\mathcal{F}^i$ が C^r 級のときに，射影的アノソフシステムを定めるリーマン計量を C^r 級にとりなおすことができるか?

問題 6.2 $\mathcal{F}^i$ が C^1 級でないとき，定理 3.10 と同様に，$\ker(\alpha_1 \pm \cdots \pm \alpha_{n+1})$ を近似して接触構造を作ることができるか?

問題 6.3 射影的アノソフシステムの定義を，三松氏による射影的アノソフ流の定義 (命題 3.4 参照) のような形で書きなおせないか?

問題 6.4 定理 4.5 の逆に相当する命題が作れないか?

仮定として，1 形式 α_1，...，α_{n+1} を，

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \rangle \neq 0$$

であり，$i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対して $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$ が $\{1, \ldots, n+1\}$ の置換になっているとき以外は

$$\alpha_{i_1} \wedge d\alpha_{i_2} \wedge \cdots \wedge d\alpha_{i_{n+1}} = 0$$

となると仮定する。このとき，$T\phi \subset \ker \alpha_1 \cap \cdots \cap \ker \alpha_{n+1}$ をみたすような射影的アノソフシステム $\phi^{\boldsymbol{t}}$ が存在するか?

存在するとき，リーマン計量は orbit と垂直な方向には $\sqrt{|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_{n+1}|^2}$ により定められるか?

問題 6.5 問題 6.4 の仮定部分を，接触構造の言葉で書けないか?

正則射影的アノソフ流に関する問題

問題 6.6 命題 5.4 は正則射影的アノソフ流についても成立するか? すなわち，正則射影的アノソフ流 ϕ^τ に対して正の実数 $k > 0$ が存在して $\phi^{ki} = \mathrm{id}_M$ となるか?

問題 6.7 命題 5.5 は正則射影的アノソフ流についても成立するか? すなわち，正則射影的アノソフ流に対して E^u，E^s は正則な葉層構造となるか?

問題 6.8 定理 5.13 は closed orbit の存在を仮定しなくても成立するか?

問題 6.9 命題 5.14 において closed orbit の存在を仮定しなくても成立するか?

問題 6.10 M 上に互いに横断的な二つの正則接触構造 ξ_1，ξ_2 があるとき，$T\phi = \xi_1 \cap \xi_2$ をみたすような正則な flow ϕ^τ がとれるか? また，このとき ϕ^τ はどのような性質をみたすか?

その他の課題

また，問題 6.3，6.4，6.10 に関連して，次の命題を考える。

命題 6.11 実 $n+r$ 次元多様体 M に，余次元 r の葉層構造 $\mathcal{F}$ があるとする。商束 $TM/\mathcal{F}$ を考える。また，$\mathcal{F}$ の同じ leaf 上の二点 p_0，p_1 をとり，p_0，p_1 を結ぶ path $\{p_\theta | \theta \in [0,1]\}$ を一つ固定する。

(局所的に)$T\phi = \mathcal{F}$ をみたす非特異な C^∞ 級の R^n-作用 $\phi^{\boldsymbol{t}}$ をとり，path に沿って $\boldsymbol{t}_0 = 0$，$p_\theta = \phi^{\boldsymbol{t}_\theta}(p)$，$\theta \in [0,1]$ ととる。このとき，線形写像

$$d\phi^{-\boldsymbol{t}_1} : TM_{p_1}/\mathcal{F}_{p_1} \to TM_{p_0}/\mathcal{F}_{p_0}$$

は，$\phi^{\boldsymbol{t}}$ のとり方によらず $\mathcal{F}$ 及び p_0，p_1 を結ぶ path の homotopy だけで決まる。

証明　点 p を原点とするような座標近傍 $\{(x,y)\} = \{(x_1,\dots,x_r),(y_1,\dots,y_n)\}$ を $\mathcal{F} = \{dx_1 = \cdots = dx_r = 0\}$ をみたすようにとる。$\mathcal{F}$ は $\phi^{\boldsymbol{t}}$ の作用で不変なので，$\phi^{\boldsymbol{t}}(x,y) = (x, f^{\boldsymbol{t}}(x,y))$ となる。

$$d\phi^{-\boldsymbol{t}_1} : TM_{p_1}/\mathcal{F}_{p_1} \to TM_{p_0}/\mathcal{F}_{p_0}$$

は，$\phi^{-\boldsymbol{t}_1}$ のヤコビ行列の左上 $r \times r$ 成分に相当する。これは単位行列であり，特に $\phi^{\boldsymbol{t}}$ のとり方によらない。 ■

つまり，$\mathcal{F}$ の同じ leaf 上の二点 p，q を結ぶ homotopy を定めると，線形写像

$$TM_q/\mathcal{F}_q \to TM_p/\mathcal{F}_p$$

が一意に定まるということである。この命題は，複素化しても同様に成立する。

この論文では，hyperplane field に対して Legendre な作用についての性質で議論したが，hyperplane field に Legendre な葉層構造について命題 6.11 の写像の性質を考えたほうが，より本質的だろうと思われる。

この論文では $2n+1$ 次元 $(n \geq 2)$ の複素多様体は扱わなかった。これも今後の課題である。

参考文献

[A] L. V. Ahlfors, Complex analysis, 3rd edition, McGraw-Hill Inc., 1979.

[ET] Y. Eliashberg and W. P. Thurston, Confoliations, University Lecture Series 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Ge] H. Geiges, Symplectic manifolds with disconnected boundary of contact type, *Internat. Math. Res. Notices*, 1994, No. 1, 23-30.

[Gh] E. Ghys, Holomorphic Anosov systems, *Invent. Math.*, 119(1995), No. 3, 584-614.

[M1] Y. Mitsumatsu, Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds, *Ann. Inst. Fourier*, 45(1995), No. 5, 1407-1421.

[M2] 三松 佳彦, 3 次元多様体上の双接触構造 (=射影的 ANOSOV 流), トポロジーシンポジウム, 1998 年, 予稿集, (1998), 137-149.

[N1] T. Noda, Projectively Anosov flows on T^3 whose stable and unstable foliations are differentiable, in preparation.

[N2] 野田 健夫, C^2 級の不安定葉層および安定葉層を持つ射影的アノソフ流について, トポロジーシンポジウム, 1998 年, 予稿集, (1998), 115-123.

[N3] 野田 健夫, 三次元多様体上の projectively Anosov flow, 修士論文, 東京大学, 1998.

[TY] N. Tsuchiya and Yamakawa, Codimension-1 locally-free actions of some solvable groups, Foliation Symposium 1998 における講演.

[Y] Y. G. Ye, A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures, *Invent. Math.*, 115(1994), No. 2, 311-314.