ある複素曲面特異点の Milnor 束から見出された S^5 から S^3 へのトーラスファイブレーション

児玉大樹 [1]　粕谷直彦 [2]　三松佳彦 [3]　森淳秀 [4]

[1] 東北大 AIMR / 理研 iTHEMS

[2] 北大理

[3] 中大理工

[4] 大阪歯大歯

日本数学会秋季分科会
2022 年 9 月 16 日

複素曲面 $W = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ 上の点 $(0, 0, 0)$ を T_{pqr} 特異点と呼ぶ。
但し、p, q, r は不等式 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} \leq 1$ を満たす正整数。

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$ のとき単純楕円型特異点、
$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} < 1$ のときカスプと呼ぶ。

以下、a は十分大きな正の値とする。

Milnor 束の準備

$W = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

T_{pqr} 特異点の Milnor 束を定義するため、十分小さい ε を取り球体 $B^6_\varepsilon = \{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \leq \varepsilon^2\}$ と W との交わりを考えたいのだが、その代わりに (必要なら)a を更に十分大きく取って $\varepsilon = 1$ と固定してよい。

$L = W \cap S^5$ を特異点のリンクと呼ぶ。

$W = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $a >> 1$,
$L = W \cap S^5$

Theorem (粕谷)

T_{pqr} 特異点のリンク L は S^1 上の T^2 束であり、そのモノドロミーは

$$\begin{pmatrix} r-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

Milnor 束

$W = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $a >> 1$,
$L = W \cap S^5$

$S^5 \setminus N(L)$ には L の法円周束の自明化の拡張となるファイバー束 $\Theta = (\arg f)|_{S^5 \setminus N(L)} : S^5 \setminus N(L) \to S^1$ がある。

一方、$F_\theta = \{f = a^{-1}e^{i\theta}\} \cap B^6$ とすると、F_θ をファイバーとする S^1 上のファイバー束 θ が得られるが、これは Θ と同型である [Milnor]。

θ のほうを特異点の Milnor 束と呼び、F_θ を Milnor ファイバーと呼ぶ。

主定理

$W = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $a >> 1$,
$L = W \cap S^5$, $F_\theta = \{f = a^{-1}e^{i\theta}\} \cap B^6$

Theorem (定理 1)

Holomorphic でない関数
$g(x, y, z) = |x|^2 + e^{2\pi i/3}|y|^2 + e^{4\pi i/3}|z|^2 : \mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
を Milnor ファイバー F_θ に制限したものは $p + q + r$ 個の臨界点
$((a^{-1}e^{i\theta})^{1/p}, 0, 0)$, $(0, (a^{-1}e^{i\theta})^{1/q}, 0)$ $(0, 0, (a^{-1}e^{i\theta})^{1/r})$ を持つ。
また、3 個の臨界値 $a^{-2/p}$, $e^{2\pi i/3}a^{-2/q}$, $e^{4\pi i/3}a^{-2/r}$ を内部に持つある円板に含まれる任意の正則値の逆像は T^2 と微分同相である。

これらの特異点は Milnor ファイバーの変形によって Lefschetz 型にできる。

S^5 から S^3 へのトーラスファイブレーション

Corollary

球面間の射影 $\pi : S^5 \to S^3$ であって、正則ファイバーが 2 次元トーラス T^2 と微分同相であり、臨界点の集合が Lefschetz 型特異点の 1 次元族であるものが存在する。

証明.

定理 1. より $F_\theta \to D^2$ が Lefschetz 型特異点を持つ T^2 束。よって
$S^5 \setminus N(L) \to D^2 \times S^1$ は Lefschetz 型特異点の 1 次元族を持つ T^2 束。
一方、$L \to S^1$ が T^2 束なので、$N(L) \to S^1 \times D^2$ も T^2 束。
これらはうまく貼り合う。 □

Lefschetz 型特異点

滑らかな写像 $G\colon M^4 \to \Sigma^2$ の特異点 P が Lefschetz 型であるとは、
正の向きの座標系 (u_1, u_2, v_1, v_2) と (w_1, w_2) がそれぞれ取れて、
$P \in M^4$ と $G(P) \in \Sigma^2$ の近傍で G が

$$(u_1, u_2, v_1, v_2) \mapsto (w_1, w_2);\, w_1 + iw_2 = (u_1 + iu_2)^2 + (v_1 + iv_2)^2$$

と書けること。

再掲: 主定理

$W = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $a >> 1$,
$L = W \cap S^5$, $F_\theta = \{f = a^{-1}e^{i\theta}\} \cap B^6$

Theorem (定理 1)

Holomorphic でない関数
$g(x,y,z) = |x|^2 + e^{2\pi i/3}|y|^2 + e^{4\pi i/3}|z|^2 : \mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
を Milnor ファイバー F_θ に制限したものは $p+q+r$ 個の臨界点
$((a^{-1}e^{i\theta})^{1/p},0,0)$, $(0,(a^{-1}e^{i\theta})^{1/q},0)$ $(0,0,(a^{-1}e^{i\theta})^{1/r})$ を持つ。
また、3 個の臨界値 $a^{-2/p}$, $e^{2\pi i/3}a^{-2/q}$, $e^{4\pi i/3}a^{-2/r}$ を内部に持つある円板に含まれる任意の正則値の逆像は T^2 と微分同相である。

これらの特異点は Milnor ファイバーの変形によって Lefschetz 型にできる。

Lagrangian トーラスファイブレーション族への変形の構成

$W = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, $a >> 1$,
$L = W \cap S^5$, $F_\theta = \{f = a^{-1}e^{i\theta}\} \cap B^6$

関数 f を次の関数 h で置き換える。まず隆起関数 $\varphi\colon [0, +\infty] \to [0, 1]$ を

$$\varphi(s) = 1 \quad (0 \leq s \leq 1/6), \quad \varphi(s) = 0 \quad (1/2 \leq s), \quad -4 \leq \varphi'(s) \leq 0$$

を満たすように取り、

$$\varphi_1 = \varphi\left(\frac{\sqrt{|y|^2 + |z^2|}}{|x|}\right), \varphi_2 = \varphi\left(\frac{\sqrt{|z|^2 + |x^2|}}{|y|}\right), \varphi_3 = \varphi\left(\frac{\sqrt{|x|^2 + |y^2|}}{|z|}\right),$$

$$h(x, y, z) = \varphi_1 x^p + \varphi_2 y^q + \varphi_3 z^r + axyz$$

とおく。線形変形 $f_t(x, y, z) := (1 - t)f(x, y, z) + t\, h(x, y, z)$ を考える。

変形の結果

$$W = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) := x^p + y^q + z^r + axyz = 0\} \subset \mathbb{C}^3,\ a >> 1,$$
$$h(x,y,z) = \varphi_1 x^p + \varphi_2 y^q + \varphi_3 z^r + axyz$$
$$f_t(x,y,z) := (1-t)f(x,y,z) + t\,h(x,y,z)$$
$$X_t = \{f_t = a^{-1}e^{i\theta}\} \cap B^6,\ g(x,y,z) = |x|^2 + e^{2\pi i/3}|y|^2 + e^{4\pi i/3}|z|^2$$

a の値を大きく取り直すなど注意深く行うと、この変形により

1. g の X_t への制限は新たな特異点を生じない
2. f_t の定める Milnor 束は凸 Liouville 多様体によるファイバー束
3. $h = f_1$ の定める Milnor ファイバー X_1 に g を制限したものは、Lagrangian ファイブレーションであり、半径 1/2 の円盤上での正則ファイバーがすべて T^2 となる。(ように領域を変形できる。)
4. Lagrangian ファイブレーションの特異点の分類 [Eliasson] から、すべての特異点が Lefschetz 型になることがわかる。